بحثی دربارهٔ بردارها

حلقه به کدام سمت می‌رود؟

عباس قلعه پوراقدم،
دبیر ریاضی ارومیه

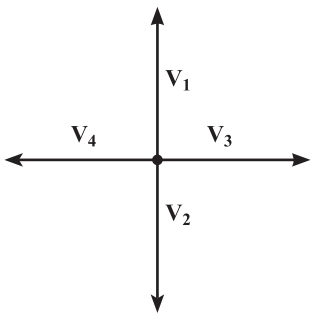
ورود به مطلب

دو دانش‌آموز با نیروی یکسان دو طناب هم‌طول را که به یک حلقهٔ فلزی کوچک وصل شده‌اند، به دو طرف می‌کشند. حلقه به کدام سمت حرکت می‌کند؟ احتمالاً بیشتر شما می‌گویید به هیچ طرف. اما چرا؟ به‌صورت شهودی و بدون استدلال دقیق علمی، می‌گویید نیروی دو طرف مساوی است و هیچ‌کدام نمی‌توانند بر دیگری غلبه کنند و حلقه را به سمت خود متمایل کنند. اما به زبان فیزیک و ریاضی می‌گوییم دو بردارِ نیروی مساوی، یکدیگر را خنثا می‌کنند و مجموع آن‌ها بردار صفر است:

$\vec{V}+(-\vec{V})=\vec{0}$

شکل ۱.

حالا فرض کنید چهار دانش‌آموز با چهار طناب به طول‌های برابر و با نیروی مساوی از چهار طرف در جهت‌های عمودبرهم و یا در یک راستا همان حلقه را می‌کشند (شکل ۲). حلقه به کدام سو می‌رود؟ احتمالاً باز هم می‌پذیرید که مجموع چهار بردار فوق در این حالت مساوی بردار صفر است:

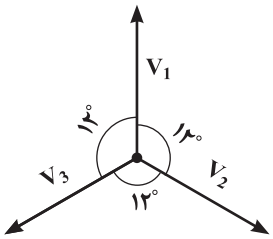


$\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}+\vec{V_4}=\vec{0}$

شکل ۲.

زیرا بردارها دوبه‌دو قرینهٔ هم هستند: $\vec{V_1}+\vec{V_2}=\vec{0}$ و $\vec{V_3}+\vec{V_4}=\vec{0}$.

اما اگر سه دانش‌آموز، سه طناب هم‌طول را با سه نیروی برابر که با هم دوبه‌دو زاویهٔ 120° می‌سازند، به سه طرف بکشند چطور؟ باز هم به‌نظر می‌آید حلقه به هیچ سمت متمایل نشود. یعنی در شکل ۳ داریم:

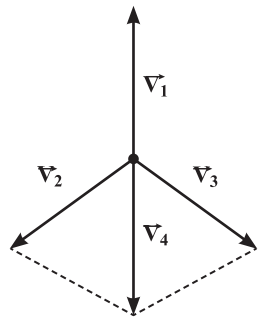


$\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=\vec{0}$

شکل ۳.

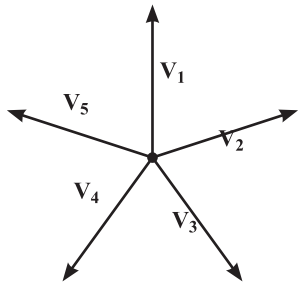
اما چطور می‌توانیم درستی این موضوع را در این حالت اثبات کنیم. به نظر می‌رسد این بار که تعداد بردارها عدد فردی است، کار دشوارتر است. البته اگر از قانون متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها استفاده کنیم، اثبات آسان می‌شود. می‌دانیم برای دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ که مبدأ مشترک دارند، قطر متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار بنا می‌شود، مجموع دو بردار را مشخص می‌کند. بنابراین در این حالت مجموع دو بردار $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ قطر متوازی‌الاضلاع (لوزی) است که اضلاع مجاور آن $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ هستند.

اما به سادگی می‌توان نشان داد، در این صورت دو مثلثی که با این قطر در لوزی ایجاد می‌شوند، متساوی‌الاضلاع هستند و در نتیجه بردار $\vec{V_4}$ با $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ و با $\vec{V_1}$ هم‌طول و با $\vec{V_1}$ هم‌راستاست. (چرا؟) لذا: $\vec{V_4}=\vec{V_2}+\vec{V_3}$ و $\vec{V_1}+\vec{V_4}=\vec{0}$ و در نتیجه: $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=\vec{0}$.



شکل ۴.

اگر پنج بردار هم‌طول و هم‌مبدأ داشـــته باشیم که دوبه‌دو با هم زاویه‌های مساوی $(\alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{۵})$ بسازند چطور؟ آیا می‌توان نشان داد: $\vec{V_۱} + \vec{V_۲} + \vec{V_۳} + \vec{V_۴} + \vec{V_۵} = \vec{۰}$؟



شکل ۵.

اکنون می‌خواهیم راه‌حلی کلی برای اثبات اینکه به ازای هر عدد طبیعـــی n، هر n بردار هم‌طول و هم مبدأ که دوبه‌دو با هم زاویه‌های $\frac{۳۶۰}{n}$ بســـازند، دارای مجموع صفر هستند، ارائه دهیم. به این منظور به مقدماتی نیاز داریم که در ادامه می‌آید.

تعریف: اگـــر A نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و B نقطهٔ $(x_۲,y_۱)$ باشـــد (A و B دارای عرض‌های یکسان ولی طول‌های متفاوت هستند.)، آن‌گاه فاصلهٔ جهت‌دار از A تا B (اندازهٔ جبری پاره‌خط AB) با علامت $\overline{AB}$ نشان داده و با مقدار $x_۲-x_۱$ تعریف می‌شود.

مثال ۱. اگـــر A نـــقطهٔ (۳,۴) و B نقطهٔ (۹,۴) باشـــد، آن‌گاه: $\overline{AB} = ۹-۳ = ۶$.

مثال ۲. اگر C نـــقطهٔ (۸,۰-) و D نـــقطهٔ (۶,۰) باشـــد، آن‌گاه: $\overline{CD} = ۶-(-۸) = ۱۴$.

مثال ۳. اگـــر P نـــقطهٔ (۴,۲) و Q نـــقطهٔ (۱,۲) باشد، آن‌گاه: $\overline{PQ} = ۱-۴ = -۳$.

نکتهٔ ۱. انـــدازهٔ جبری می‌تواند مثبت یا منفی باشـــد، ولی فاصلهٔ غیرجهـــت‌دار از A تا B که همان طول پاره‌خط AB است، همیشه کمیتی مثبت اســـت. در واقع، طول پاره‌خط برابر قدرمطلق اندازهٔ جبری است.

نکتهٔ ۲. در مورد نقطه‌هـــای $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$، $\overline{AB}$ به‌صورت $y_۲-y_۱$ تعریف می‌شود.

تعریف: بردار یکّه در راســـتای هر محور، برداری است به طول واحد و در جهـــت همان محور. بردارهای یکّـــه روی محورهای x و y را به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نامیم.

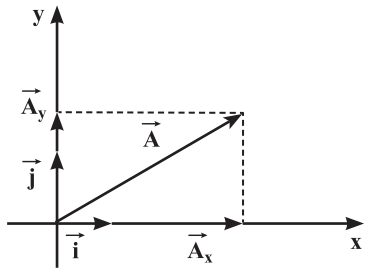
تجزیهٔ یک بردار برحسب بردارهای یکه و مؤلفه‌هایش

برای تعیین مؤلفه‌های $\vec{A}$ روی محورهای x و y مطابق شکل ۶ از انتهای بردار A خطوطی موازی هر یک از دو محور رسم می‌کنیم تا محورها را قطع کنند. $\overrightarrow{A_x}$ و $\overrightarrow{A_y}$ مؤلفه‌های بردار A هستند. در واقع $\vec{A}$ برایند این دو بردار است و می‌توان نوشت: $\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$.

فرض کنیم a_x و a_y به ترتیب اندازه‌های جبری $\overrightarrow{A_x}$ و $\overrightarrow{A_y}$ باشند. به وضوح داریم:

$$\overrightarrow{A_x} = a_x\vec{i},\ \overrightarrow{A_y} = a_y\vec{j}$$

و همچنین: $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.

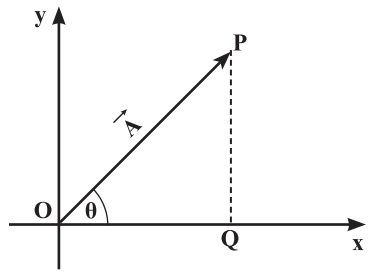


شکل ۶.

حـــال فرض کنیم زاویه‌ای که بردار A با جهت مثبت محور xها می‌ســـازد و پادساعت‌گرد نسبت به این محور اندازه‌گیری می‌شود، θ باشد. همچنین طول $\vec{A}$ را a در نظر می‌گیریم. روابط میان θ، a، a_x و a_y را با توجـــه به مقادیری که θ می‌تواند اختیار کند، در دو حالت بررســـی و به دست می‌آوریم و دو حالت بعدی را برای تمرین در نظر می‌گیریم.

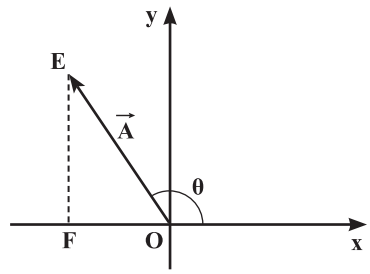
حالت اول (θ حاده): مطابق شـــکل ۷، در مثلـــث قائم‌الزاویهٔ OPQ می‌تـــوان نوشـــت: $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ و $\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$.

چون a_x و a_y مثبت‌اند، لذا: $a_x = a\cos\theta$. $a_y = a\sin\theta$



شکل ۷.

حالت دوم ($90^\circ<\theta<180^\circ$): مطابق شکل ۸، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OEF می‌توان نوشت:



$$\sin(180-\theta)=\frac{EF}{OE},\ \cos(180-\theta)=\frac{OF}{OE}$$

شکل ۸.

به وضوح a_x مقداری منفی و a_y مقداری مثبت است، لذا طول EF با a_y برابر است، ولی طول OF با قدرمطلق a_x یا همان $-a_x$ برابر است. با توجه به اینکه OE=a، $\sin(180-\theta)=\sin\theta$ و $\cos(180-\theta)=-\cos\theta$، باز همان روابط $a_x=a.\cos\theta$ و $a_y=a.\sin\theta$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۴. بردار A به طول ۱۰ واحد با جهت مثبت محور xها پادساعت‌گرد، زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. اندازهٔ جبری مؤلفه‌های $\vec{A}$ را روی محورهای x و y بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a_x=a.\cos\theta \Rightarrow a_x=10\times\cos 60^\circ=5 \\ a_y=a.\sin\theta \Rightarrow a_y=10\times\sin 60^\circ=5\sqrt{3} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \vec{A}=5\vec{i}+5\sqrt{3}\vec{j}$$

حال به سراغ سه نفری می‌رویم که شوق طناب‌کشی به سرشان افتاده! بردارهای مربوط به سه نیروی کششی هم‌اندازه را $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌نامیم و طول بردارها را a فرض می‌کنیم. اگر بردار برایند این سه را R بنامیم، و فرض کنیم: $\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$، $\vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$ و $\vec{C}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}$. خواهیم داشت:

$$\vec{R}=(a_x+b_x+c_x)\vec{i}+(a_y+b_y+c_y)\vec{j}$$

مطابق شکل ۹، بردار A را روی محور xها می‌اندازیم و با فرض θ_1، θ_2 و θ_3 به عنوان مقادیر θ به ترتیب برای بردارهای A، B و C خواهیم داشت: $\theta_1=0$، $\theta_2=120^\circ$ و $\theta_3=240^\circ$. در ادامه داریم:

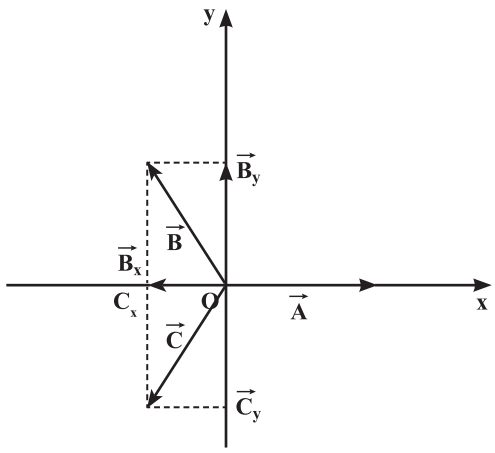
$$a_x=a.\cos 0^\circ=a,\ b_x=a.\cos 120^\circ=\frac{-a}{2},$$

$$c_x=a.\cos 240^\circ=\frac{-a}{2}$$

$$a_y=a.\sin 0^\circ=0,\ b_y=a.\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$c_y=a.\sin 240^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

با توجه به اینکه: $a_x+b_x+c_x=0$ و $a_y+b_y+c_y=0$، لذا $\vec{R}=0$ و حلقه حرکتی نخواهد کرد.



شکل ۹.

برای N=۴ هم حلقه تکان نخواهد خورد. همان‌طور که دیدید

با دو جفت بردار هم‌راستا و غیرهم‌جهت طرف هستید که یکدیگر را خنثی می‌کنند. اگر قانع نشدید، بردارها را تجزیه و برایند مؤلفه‌ها را محاسبه کنید.

حالت کلی (قضیهٔ اصلی): N بردار A_1، A_2، ... و A_N با شرط $N>1$ را با مفروضات زیر در نظر می‌گیریم:

۱. $|\overrightarrow{A_1}| = |\overrightarrow{A_2}| = \ldots = |\overrightarrow{A_N}| = a$

۲. نقطهٔ ابتدایی هر N بردار یکسان است.

۳. هر بردار با بردار قبلی زاویهٔ $\frac{2\pi}{N}$ می‌سازد.

در این‌صورت برایند این N بردار صفر است.

برهان: برای اثبات قضیه به دو برابری زیر نیاز داریم. اولی را ثابت می‌کنیم و شمارهٔ دوم را تمرین قرار می‌دهیم.

$$\cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta+2\alpha) + \ldots + \cos(\theta+m\alpha) = \frac{\sin\frac{(m-1)\alpha}{2}\cos(\theta+\frac{m\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta+2\alpha) + \ldots + \sin(\theta+m\alpha) = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin(\theta+\frac{m\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

عبارت سمت چپ (۱) را در $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\text{سمت چپ} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+\alpha) + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+2\alpha) + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+m\alpha)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

حال به کمک دستور $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ داریم:

$$\text{صورت کسر} = \left[\sin(\frac{\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)\right] + \left[\sin(\frac{3\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{-\alpha}{2}-\theta)\right] + \left[\sin(\frac{5\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{-3\alpha}{2}-\theta)\right] + \ldots + \left[\sin(\frac{2m+1}{2}\alpha+\theta)+\sin(\frac{1-2m}{2}\alpha-\theta)\right]$$

و با توجه به $\sin(-x)=-\sin x$، با حذف جملات قرینه در صورت کسر خواهیم داشت:

$$\text{صورت کسر} = \sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)+\sin(\frac{2m+1}{2}\alpha+\theta)$$

و به کمک دستور $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید. حال با جاگذاری $\theta=0$، $\alpha=\frac{2\pi}{N}$ و $m=N-1$ و با توجه به $\sin\pi=0$، به برابری زیر می‌رسیم که برای اثبات قضیهٔ اصلی بدان نیازمندیم:

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + \ldots + \cos\frac{(N-1)2\pi}{N} = 0 \quad (3)$$

در برابری (۲) نیز با جاگذاری‌های فوق به برابری زیر خواهیم رسید:

$$\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{N} + \sin\frac{4\pi}{N} + \ldots + \sin\frac{(N-1)2\pi}{N} = 0 \quad (4)$$

حال برای یافتن برایند N بردار، تجزیهٔ آن‌ها را روی محورها با فرض اینکه $\overrightarrow{A_1}$ روی محور xها واقع باشد. در نظر می‌گیریم. فرض کنیم: $\overrightarrow{A_t} = a_t\vec{i} + b_t\vec{j}$ و $1\le t\le N$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$a_1 = a\cos 0,\ a_2 = a\cos\frac{2\pi}{N},\ a_3 = a\cos\frac{4\pi}{N},\ldots,$$

$$a_N = a\cos\frac{(N-1)2\pi}{N}$$

$$b_1 = a\sin 0,\ b_2 = a\sin\frac{2\pi}{N},\ b_3 = a\sin\frac{4\pi}{N},\ldots,$$

$$b_N = a\sin\frac{(N-1)2\pi}{N}$$

از طرف دیگر، با توجه به برابری‌های (۳) و (۴) داریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N = a\left[\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{N} + \ldots + \cos\frac{(N-1)2\pi}{N}\right] = a\times 0 = 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_N = a\left[\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{N} + \ldots + \sin\frac{(N-1)2\pi}{N}\right] = a\times 0 = 0$$

لذا $\overrightarrow{A_1} = 0$ و باز هم حلقه تکانی نمی‌خورد!

منابع

۱. رسکی، شکلیا؛ یاگلوم، ایساک موسوویچ؛ چنتسوف (۱۳۶۶). گزیده‌ای از مهم‌ترین مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی. ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار. تهران. چاپ اول.

2. Halliday, David, Resnick, Robert. (1978). Physics. john Willey and Sons. 3rd ed.